1176. 初等函數ノ特徴付ケ

春木　博（神戸高等商船學校）

§1. 指数函数ノ特徴付ケ

指数函数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n}{n!}$ ハ解析学ニ於テ、重要ナル意義ヲ持ツ。今之レヲ種々ノ方面ヨリ特徴付ケテ見ヨウ。

定理1 $f(Z)$ ヲ或ル領域Dニ於テ、一價正則ナル函数トシ、且ツソコデ、函数方程式 $f(Z_1+Z_2)=f(Z_1)f(Z_2)$ ヲ満足スルナラバ $f(Z)=e^{\alpha Z}$ デアル。但シ茲ニ、α ハ任意ノ複素常数トシ、$f(Z)\equiv 0$ ナル場合ハ除ク。

定理2 $f(Z)$ ヲ或ル領域Dニ於テ、一價正則ナル函数トシ、且ツソコデ、微分方程式 $f'(Z)=f(Z)$ ヲ満足スルナラバ $f(Z)=\alpha e^Z$ デアル。但シ α ハ任意ノ複素常数ナリトスル。

定理3 $f(Z)$ ヲ整函数トシ、且ツ決シテ 0 ナル値ヲ取ラナケレバ $f(Z)=e^{\alpha Z+\beta}$ デアル。但シ α ナラザル任意ノ複素常数デ、β ハ任意ノ複素常数トスル。

以上ノ三定理ノ証明ハ容易デアル。

定理4 $f(Z)$ ヲ或ル領域デ、一價正則ナル（恒等的ニハ常数デナイ）函数トシ、ソノ領域デ、$|f(Z)|$ ガ x ノミノ函数ナラバ、$(Z=x+iy)$．$f(Z)=e^{\alpha Z+\beta}$ デアル。但シ α ハ 0 ナラザル任意ノ實常数トシ、β ハ任意ノ複素常数ナリトスル。

（証明）$f(Z)$ ハ恒等的ニ常数デナイ正則函数デアルカラ、
D ノ適当ナ部分領域 D^* デハ $f(Z) \neq 0$ デアル。

故ニ、$\varphi(Z) = \log f(Z)$ トオケバ $\varphi(Z)$ ハ D^* ニ於テ、一價正則デ、且ツ $f(Z)$ ノ假定カラ〔$R\{\varphi(Z)\}$ ハ $\varphi(Z)$ ノ實数部分ヲ表ス〕

$$R\{\varphi(Z)\} = P(x)$$

茲ニ $P(x)$ ハ x ノミノ調和函数ナル故 $P(x) = \alpha x + \gamma$
但シ α, γ ハ任意ノ實常数デ $\alpha \neq 0$ ナリトスル。

之ヨリ $f(Z)$ ニ戻レバ $f(Z) = e^{\alpha Z + \beta}$ トナル。但シ α ハ 0 ナラザル任意ノ實常数デ、β ハ任意ノ複素常数ナリトスル。

以上ノ四定理ニ於テ $f(Z) = e^Z$ トスルニハ $\boxed{\text{定理 1}}$ ニ於テハ $f'(0) = 1$（D が原点ヲ含ムトスル），$\boxed{\text{定理 2}}$ ニ於テハ $f(0) = 1$（D が原点ヲ含ムトスル），$\boxed{\text{定理 3}}$ 及ビ $\boxed{\text{定理 4}}$ ニ於テハ $f(0) = 1$，$f'(0) = 1$ 等ノ假定ヲ附ケ加ヘレバヨイ。

筆者ハ、数物記事 Vol. 25, No.7 July, 1943 ニ於テ次ノ理ヲ証明シタ。

$\boxed{\text{定理 5}}$ $f(Z)$ ヲ原点ヲ含ム或ル領域 D ニ於テ一價正則ニシテ、且ツ D ニ於ケル $f(Z)$ ニ関スル Betragfläche ノ凡ベテノ点が抛物点ナル函数トシ、更ニ $f(0) = f'(0) = 1$ ナラバ、$f(Z) = e^Z$ デアル，

次ニ函数ノ單葉性ニ依リ初等函数ヲ特徴付ケテ見ヨウ。
先ヅ指数函数カラ始メル。ソレニハ次ノ Bieberbach

ノ定理及ビ Löwner ノ定理ガ基本ニナル。

$\boxed{\text{Bieberbach ノ定理}}$ $f(Z)=Z+a_2Z^2+a_3Z^3+\cdots+a_nZ^n+\cdots$ ガ $|Z|<1$ デ一價正則且ツ単葉ニシテ、$a_2=2e^{i\theta}$ ナラバ

$f(Z)=\dfrac{Z}{(1-e^{i\theta}Z)^2}$ デアル。但シ θ ハ任意ノ實数ナリトスル。

$\boxed{\text{Löwner ノ定理}}$ $f(Z)=Z+a_2Z^2+a_3Z^3+\cdots+a_nZ^n+\cdots$

ガ $|Z|<1$ デ一價正則且ツ単葉ニシテ、$a_3=3e^{2i\theta}$ ナラバ

$$f(Z)=\frac{Z}{(1-e^{i\theta}Z)^2}$$

デアル。 但シ θ ハ任意ノ實数ナリトスル.

$\boxed{\text{定理 6}}$ $f(Z)$ ガ $0<\mathfrak{J}(Z)<2\pi$ $\{\mathfrak{J}(Z)$ ハ Z ノ虚数部分ヲ表ハス$\}$ デ、一價正則且ツ単葉ニシテ、次ノ(1), (2)ノ中、何レカ一方ノ條件ヲ満足スルナラバ $f(Z)=\alpha e^Z+\beta$ デアル。茲ニ α ハ 0 ナラザル任意ノ複素常数, β ハ任意ノ複素常数ナリトスル。

(1) $f'(i\pi)=f''(i\pi)$

(2) $f'(i\pi)=f'''(i\pi)$

(証明) $g(Z)=f\left\{2\log\dfrac{i(1+Z)}{1-Z}\right\}$ トオケバ、$f(Z)$ ニ関スル假定ニヨリ、容易ニ $g(Z)$ ハ $|Z|<1$ ニテ、一價正則ニシテ且ツ単葉ナルコトガ判ル。

$g(Z)$ ヲ巾級数ニ展開スレバ

$$g(Z)=f(i\pi)+4f'(i\pi)Z+8f''(i\pi)Z^2+\frac{4}{3}\{f'(i\pi)+8f'''(i\pi)\}Z^3+\cdots\cdots$$

$f(Z)$ ノ単葉性ニ依リ. $f'(i\pi)\neq 0$ ナル故

$$h(Z)=\frac{g(Z)-f'(i\pi)}{4f'(i\pi)}$$

トオクトキ

$$h(Z)=Z+\frac{2f''(i\pi)}{f'(i\pi)}Z^2+\frac{1}{3}\left\{1+\frac{8f'''(i\pi)}{f'(i\pi)}\right\}Z^3+\cdots\cdots$$

(1)ナル條件ガ満足サレレバ、$h(Z)$ ハ $|Z|<1$ デ正則且ツ単葉デ Z^2 ノ係数ガ2ナル故 Bieberbach ノ定理ニヨリ　($\theta=0$ ナル場合)

$$h(Z)=\frac{Z}{(1-Z)^2}$$

同様ニシテ、(2)ナル條件ガ満足サレレバ、前記 Löwner ノ定理ニヨリ ($\theta=0$ ナル場合)

$$h(Z)=\frac{Z}{(1-Z)^2}$$

何レノ場合ニモセヨ、オキ戻セバ $f(Z)=\alpha e^Z+\beta\ (\alpha\neq 0)$ ノ形ニナル。

上ノ定理ヨリ直チニ次ノ系ヲ得ル。

$\boxed{\text{系}}$ $f(Z)$ ヲ $\boxed{\text{定理6}}$ ノ條件ヲ満足スル函数トシ、更ニ $f(i\pi)=-1$, $f'(i\pi)=-1$ ナラバ $f(Z)=e^Z$ デアル.

§2. 次ニ三角函数ヲ $\boxed{\text{定理6}}$ ヲ得タ時ト同ジヤウナ方法ニヨッテ特徴付ケテ見ヨウ。

先ヅ $\sin Z$ カラ始メル。

$\boxed{\text{定理7}}$ $f(Z)$ ガ $-\frac{\pi}{2}<R(Z)<\frac{\pi}{2}$ $\{R(Z)$ ハ Z ノ實数部分ヲ

表ハス１デ、一價正則且ツ單葉ニシテ、ソコデ１ナル値ヲ取ラズ $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$ ナラバ $f(z)=\sin z$ デアル。

(證明) $g(z)=\dfrac{1}{f(i\log\frac{1+z}{1-z})-1}$ トオケバ、$f(z)$ ニ關スル假定ニヨリ、容易ニ、$g(z)$ ハ $|z|<1$ ニテ、一價正則ニシテ、且ツ單葉ナルコトガ判ル。

$g(z)$ ヲ巾級數ニ展開スレバ

$$g(z)=-1-2iz+4z^2+\cdots\cdots$$

$$h(z)=-\frac{g(z)+1}{2i}$$ トオケバ

$$h(z)=z+2iz^2+\cdots\cdots$$

$h(z)$ ハ $|z|<1$ デ一價正則且ツ單葉ニシテ z^2 ノ係數ガ $2i$ ナル故、前記 Bieberbach ノ定理ニヨリ($\theta=\frac{\pi}{2}$ ナル場合)

$$h(z)=\frac{z}{(1-iz)^2}$$

オキ戻セバ $$f(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z$$

次ニ $\cos z$ ヲ特徴付ケヨウ。

$\boxed{\text{定理 8}}$ $f(z)$ ガ $0<R(z)<\pi$ デ一價正則且ツ單葉ニシテ、ソコデ１ナル値ヲ取ラズ、$f(\frac{\pi}{2})=0$, $f'(\frac{\pi}{2})=-1$, $f''(\frac{\pi}{2})=0$ ナラバ $f(z)=\cos z$ デアル。

(證明) $f_1(z)=f(\frac{\pi}{2}-z)$ トオケバ、假定ニヨリ、$f_1(z)$

ハ $-\frac{\pi}{2}<R(z)<\frac{\pi}{2}$ デ一價正則且ツ單葉ニシテ、ソコデ i ナル値ヲ取ラズ、$f_1(0)=0,\ f_1'(0)=1,\ f_1''(0)=0$ ナルコトガ判ルカラ、

$\boxed{\text{定理 7}}$ ニヨリ　$f_1(z)=\sin z$

オキ戻セバ　$f(z)=\cos z$

次ニ $\tan z$ ヲ特徴付ケヨウ。

$\boxed{\text{定理 9}}$ $f(z)$ ガ $-\frac{\pi}{2}<R(z)<\frac{\pi}{2}$ デ一價正則且ツ單葉ニシテ、ソコデ i ナル値ヲ取ラズ、$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0$ ナラバ

$$f(z)=\tan z \text{ デアル。}$$

(證明)　定理 7 ニ於ケル證明ノヤウニ、今度ハ

$$g(z)=\frac{1}{f\left(i\log\frac{1+z}{1-z}\right)-i}$$

トオケバ、アトハ全ク同ジヤウニシテ出來ル。

次ニ $\cot z$ ヲ特徴付ケヨウ。

$\boxed{\text{定理 10}}$ $f(z)$ ガ $0<R(z)<\pi$ デ、一價正則且ツ單葉ニシテ、ソコデ i ナル値ヲ取ラズ $f(\frac{\pi}{2})=0,\ f'(\frac{\pi}{2})=-1,\ f''(\frac{\pi}{2})=0$ ナラバ $f(z)=\cot z$ デアル。

(證明)　$f_1(z)=f(\frac{\pi}{2}-z)$ トオケバ定理 9 ニ歸着サレル。

以上ノ結果ヲ表示スレバ次ノ如クナル。

正則単葉領域	指定サレタ除外値	函数及ビソノ導函数ノ値ニツイテノ條件	求ムル函数
$0<\mathfrak{I}(Z)<2\pi$		$f(\pi i)=f'(\pi i)=f''(\pi i)=-1$	e^{Z}
$-\frac{\pi}{2}<R(Z)<\frac{\pi}{2}$	1	$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0$	$\sin Z$
$0<R(Z)<\pi$	1	$f(\frac{\pi}{2})=0, f'(\frac{\pi}{2})=-1, f''(\frac{\pi}{2})=0$	$\cos Z$
$-\frac{\pi}{2}<R(Z)<\frac{\pi}{2}$	i	$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0$	$\tan Z$
$0<R(Z)<\pi$	i	$f(\frac{\pi}{2})=0, f'(\frac{\pi}{2})=-1, f''(\frac{\pi}{2})=0$	$\cot Z$

次ニ $\sec Z$ ヲ特徴付ケヨウ。

定理 11 $f(Z)$ ガ $0<R(Z)<\pi$ デ単葉ニシテ、$Z=\frac{\pi}{2}$ デ極ヲ有シ、他ノ点デハ一價正則デ、ソコデ $0, 1$ ナル値ヲ取ラズ、

$h(Z)=\frac{1}{f(Z)}$ トオクトキ $h'(\frac{\pi}{2})=-1,\ h''(\frac{\pi}{2})=0$ ナラバ

$$f(Z)=\sec Z \qquad \text{デアル。}$$

（証明） $h(Z)$ ガ定理8ノ條件ヲ満足スルコトカラ明カデアル。

次ニ $\operatorname{cosec} Z$ ヲ特徴付ケヨウ。

定理12 $f(Z)$ ガ $-\frac{\pi}{2}<R(Z)<\frac{\pi}{2}$ デ単葉ニシテ、$Z=0$ デ極ヲ有シ、他ノ点デ一價正則デ、ソコデ $0, 1$ ナル値ヲ取ラズ、$h(Z)=\frac{1}{f(Z)}$ トオクトキ $h'(0)=1$, $h''(0)=0$ ナラバ

$$f(Z)=\operatorname{cosec} Z \qquad \text{デアル。}$$

（証明） $h(Z)$ ガ定理7ノ條件ヲ滿足スルコトカラ明カデアル。

§3. 二次式 aZ^2+bZ+C ノ特徴付ケ

筆者ハ数物記事 Vol. 25, No. 7, July 1943. 於テ、次ノ定理ヲ證明シタ。

$\boxed{\text{定理13}}$ $f(Z)$ ガ $R(Z)>0$ デ一價正則且ツ單葉ニシテソコデ、次ノ(1)或ハ(2)ノ條件ノ中，何レカ一方ヲ滿足スルナラバ、

$$f(Z)=\alpha Z^2+\beta$$

デアル。但シ α ハ 0 ナラザル任意ノ複素常数，β ハ任意ノ複素常数トスル。

(1) $f''(1)-f'(1)=0$

(2) $f'''(1)+3f''(1)-3f'(1)=0$

次ニコノ定理ヲ利用シテ一次変換 $Z'=Z+\dfrac{b}{2a}$ ニヨリ容易ニ次ノ定理ヲ得ル。

$\boxed{\text{定理14}}$ $f(Z)$ ガ $R(Z)>R\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ デ一價正則且ツ單葉ニシテ、ソコデ次ノ(1),(2)ノ中何レカ一方ノ條件ヲ充スナラバ

$$f(Z)=\alpha(aZ^2+bZ+C)$$

デアル。 但シ α, a ハ 0 ナラザル任意ノ複素常数, b, C ハ任意ノ複素常数ナリトスル。

(1) $f''\left(1-\frac{b}{2a}\right)-f'\left(1-\frac{b}{2a}\right)=0$

(2) $f'''\left(1-\frac{b}{2a}\right)+3f''\left(1-\frac{b}{2a}\right)-3f'\left(1-\frac{b}{2a}\right)=0$

§4. 巾函数ノ特徴付ケ

次ニ、巾函数 Z^n（n ハ正ノ整数）ヲ特徴付ケテ見ヨウ。

$\boxed{\text{定理15}}$ $f(Z)$ ガ $-\frac{\pi}{n}<\arg f'(Z)<\frac{\pi}{n}$ デ一價正則且ツ単葉ニシテ且ツ $(n-1)f'(1)-f''(1)=0$ ナラバ

$$f(Z)=\alpha Z^n+\beta$$

デアル。但シ n ハ正ノ整数ニシテ、α ハ 0 ナラザル任意ノ複素常数、β ハ任意ノ複素常数ナリトスル。

（証明） $g(Z)=f\left\{\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)^{\frac{2}{n}}\right\}$ トオイテ前述ノ方法ニ従ヘバ同様ニシテ出来ル。

$\boxed{\text{系}}$ $f(Z)$ が定理 15 ノ條件ヲ満足シ、更ニ $f(1)=1$, $f'(1)=n$ ナラバ $f(Z)=Z^n$ デアル。

—（完）—